TD 06

Exo 5). Trouver les extrema locaux et globaux.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = x^4 + 3y^2 - 2x^2$.

f est de classe C^∞ car polynomiale.

Comme f est différentiable partout, si p est un extremum local, alors $\nabla f(p) = 0$.

$$\nabla f(x,y) = (4x^3 - 4x \, ; \, 6y).$$

Les points critiques, déterminés par $\nabla f(x,y) = (0,0)$, sont donc donnés par :

$$\begin{cases} 4x(x^2-1) = 0 \\ 6y = 0 \end{cases} \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} x=0 \text{ ou } x=1 \text{ ou } x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

Donc $\text{Crit}(f) = \{(0,0), (1,0), (-1,0)\}$.

On va vérifier si ces points sont des extrema locaux.

Comme f est C^2, on calcule la hessienne :

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$H(f)(1,0) = H(f)(-1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres sont positives (8 et 6), donc $H(f)(\pm 1, 0)$ est définie positive, et $(1,0)$ et $(-1,0)$ sont des points de minimum local.

$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. Les valeurs propres ($-4$ et 6) sont de signe opposé.

Donc ~~H(f)(0,0) n'est pas~~ $(0,0)$ est un point de selle (et donc pas un extremum local.

· On remarque que $f(x,y) = x^4 - 2x^2 + 1 + 3y^2 - 1 = (x^2-1)^2 + 3y^2 - 1 \geq -1$.

Donc f admet des minimums globaux (en $(1,0)$ et $(-1,0)$)

En revanche $f(x,y) \to +\infty$ pour $(x,y) \to \infty$, donc f n'admet pas de maximums globaux (on le savait déjà, car dans ce cadre ($\mathbb{R}^2$ ouvert) un maximum global est aussi local).

d) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$

f est de classe C^∞ sur son domaine (car compositions de fonctions polynomiales et du $\ln$).

Donc les extrema locaux p satisfont $\nabla f(p) = (0,0)$

$$\nabla f(x,y) = \left(2xy \, ; \, x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y\right)$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y = 0 \end{cases} \underset{(y>0)}{\iff} \begin{cases} x = 0 \\ \ln y(\ln y + 2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ \ln y = 0 \text{ ou } \ln y = -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \text{ ou } y = e^{-2} \end{cases}$$ Donc $Crit(f) = \{(0,1), (0, e^{-2})\}$.

Etudions maintenant la ~~[illegible]~~ hessienne de f a ces deux points.

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & \frac{2\ln y}{y} + \frac{2}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y & 2x \\ 2x & \frac{2}{y}(\ln y + 1) \end{pmatrix}.$$

$$H(f)(0,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$, les valeurs propres sont positives (2 et 2), donc $(0,1)$ est un point de minimum local.

$$H(f)(0,e^{-2}) = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ 0 & 2e^{2}(-2+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0 \\ -2e^{2} & -2e^{2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont de signe discord, donc p est un point de selle (pas un extremum).

On remarque que $y>0$, $x^2+(\ln y)^2 \geq 0$, donc $f(x,y) \geq 0$ et f admet minimum global (en $(0,1)$ $f(0,1)=0$).

Par contre $f(0,y) \to +\infty$ si $y \to +\infty$, donc f n'admet pas de maximum global (on le savait déjà, si il y en avait un, il aurait été aussi max local, car le domaine de déf. de f est un ouvert).

8) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x,y) = (\arctan x - y)^2$.

On remarque que $f(x,y) \geq 0$, et $f(x,y)=0 \Leftrightarrow y = \arctan x$.

Il s'en suit que les points dans la courbe $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \arctan x\}$ sont des extrema (minima) locaux et globaux.

Il n'y a pas d'autres extrema.

Si on veut procéder comme d'habitude, on a :

- f de classe C^∞ (par composition de C^∞)
- $\nabla f = \left(\dfrac{2(\arctan x - y)}{1+x^2} ; -2(\arctan x - y) \right) = (0,0) \Leftrightarrow y = \arctan x$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{2-4x(\arctan x - y)}{(1+x^2)^2} & \dfrac{-2}{1+x^2} \\ \dfrac{-2}{1+x^2} & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $y = \arctan x$, $\det Hf(x,y) = 0$.

Donc pour tout $p \in C$, $H(f)(p)$ a une valeur propre nulle

l'autre est >0 (Méthode des mineurs, on a un mineur $\boxed{=2}$, par calcul direct),

ou encore $\operatorname{Trace} H(f)(p) = 2 + \dfrac{2}{(1+x^2)^2} > 0$.

l'autre ↑ valeur propre.

∂) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^3$ (de classe C^∞).

$\nabla f(x,y) = (2x, -3y^2) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$.

Donc les seuls points critique est $(0,0)$.

$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$ $\quad H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de $H(f)(0,0)$ sont 2 et 0. Donc $H(f)(0,0)$ est semi-définie positive, et $(0,0)$ n'est pas un max local

On remarque que $f(0,y) = -y^3$, et $-y^3 > 0$ pour $y < 0$

$-y^3 < 0$ pour $y > 0$.

Donc pour n'importe quel voisinage U de $(0,0)$, il y a $p, q \in U$ tels que $f(p) > f(0,0) = 0 > f(q)$, et $(0,0)$ n'est pas un extremum local.

f n'admet pas non plus d'extrema globaux, car $f(\mathbb{R}^2) \supseteq f(\{0\} \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 1\right)^2$

$\left(f(p) = (\|p\|_2 - 1)^2 \text{ pour } p \in \mathbb{R}^3 \right)$.

f est $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, par composition, car :

$t \mapsto t^2$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et $(x,y,z) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$.

On remarque que en $(0,0,0)$, f n'est pas différentiable !

$$\underset{g(x)}{\underset{\shortparallel}{f(x,0,0)}} = (\sqrt{x^2} - 1)^2 = (|x|-1)^2 = \begin{cases} (x-1)^2 & x \geq 0 \\ (-x-1)^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

Donc la dérivée à droite de g en 0 est $2(x-1)|_{x=0} = -2$

" à gauche " " $2(x+1)|_{x=0} = +2$.

$$-2 \neq +2$$

Donc g n'est pas dérivable en 0, c'est à dire que $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'existe pas en $(0,0,0)$, et f n'est pas différentiable en $(0,0,0)$.

Si $p \in \mathbb{R}^3$ est un point d'extremum et f est différentiable ~~dans~~ en p, alors

$\nabla f(p) = (0,0,0)$.

Pour $\underset{(x,y,z)}{\underset{\shortparallel}{p}} \neq 0$, $\nabla f(p) = \left(2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 1\right) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, ; \, 2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 1\right) \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \, ; \right.$

$\left. 2\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} - 1\right) \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$.

$\nabla f(p) = 0 \iff \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1 \iff \|p\|_2 = 1 \iff p \in S$, où

~~[illegible]~~ S est la ~~sphère~~ sphère de centre $(0,0,0)$ et rayon 1.

On veut comprendre si $p \in S$ sont des extrema.

Pour $p \in S$, $f(p) = (\|p\|_2 - 1)^2 = (1-1)^2 = 0$.

et $f(q) \geq 0 \quad \forall q \in \mathbb{R}^3$.

Il s'en suit que tout point $p \in S$ est un minimum local et global pour f.

(Remarquons que $\det H(f)(p) = 0 \ \forall p \in S$, car si $\det H(f) \neq 0$ et p est un minimum, $\Rightarrow \underset{(q \neq p)}{f(q) > f(p)}$ au voisinage épointé de p).

Il nous reste à étudier le point $(0,0,0)$.

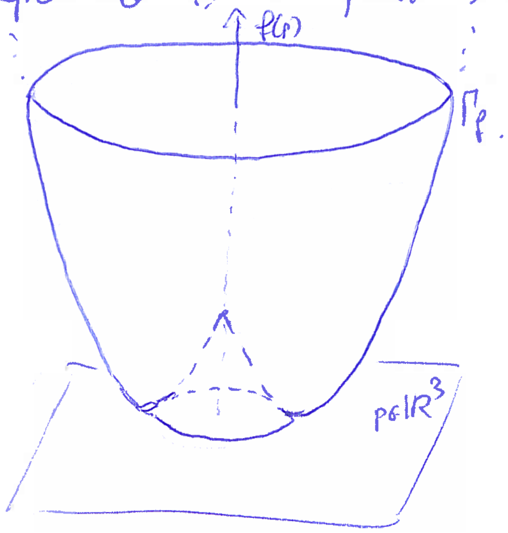
$f(0,0,0) = (-1)^2 = 1$.

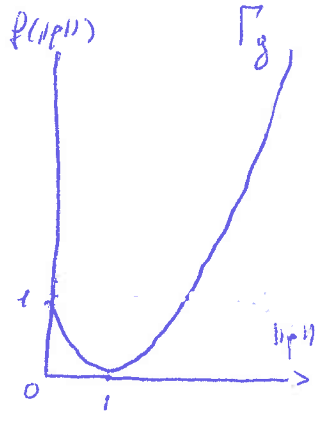
Au voisinage de $(0,0,0)$, ~~on~~ disons la boule de centre $(0,0,0)$ et rayon 1, on a $\|q\|_2 \leq 1$, et $f(q) = (\underbrace{\|q\|_2 - 1)^2}_{]0,1]} \in]0,1]$.

Donc $f(q) \leq f(0)$ au voisinage de 0, et $(0,0,0)$ est un maximum local.

En effet, pour mieux comprendre f, on peut l'écrire comme :

$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_+ \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$
$$p \mapsto \|p\|_2 .$$
$$t \mapsto (t-1)^2$$





Exo 8

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy(\sqrt{|1-x^2-y^2|}-1)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) En $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, f est décrite comme produit de $(x,y) \mapsto \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ (rationnelle donc $\mathcal{C}^\infty$) et $(x,y) \mapsto (\sqrt{|x^2+y-1|}-1)^2$ qui est composition de fonctions continues.

Donc f est continue en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Pour montrer que f est continue en $(0,0)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy(\sqrt{|1-x^2-y^2|}-1)}{x^2+y^2} \overset{?}{=} f(0,0) = 0.$$

pour x, y assez petits :

$$\text{or, } \left| \frac{2xy(\sqrt{|1-x^2-y^2|}-1)}{x^2+y^2} \right| \le \frac{2|x||y|\,|\overset{\to 0}{\sqrt{1-x^2-y^2}-1}|}{x^2+y^2} \le |\sqrt{1-x^2-y^2}-1| \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

$|x| \le \sqrt{x^2+y^2}$
$|y| \le \sqrt{x^2+y^2}$ ou si on veut, $2|x||y| \le x^2+y^2$

Donc f est $\mathcal{C}^0$.

- Remarquons que $t \mapsto \sqrt{t}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
  $t \mapsto |t|$ est $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^*$.

Donc par composition f est $\mathcal{C}^\infty$ en $\mathbb{R}^2 \setminus (\{(0,0)\} \cup \{(x,y) \mid x^2+y^2=1\})$

Étudions f autour de $(0,0)$, à travers du développement limité.

Au voisinage de 0, $f(x,y) = \dfrac{2xy(\sqrt{1-x^2-y^2}-1)}{x^2+y^2}$

On a que $\sqrt{1-t} = 1 - \dfrac{t}{2} + o(t)$, hence $\sqrt{1-x^2-y^2} = 1 - \frac{1}{2}(x^2+y^2) + o(\|p\|_2^2)$. ou $(o(\|p\|_2^3))$

Donc $f(x,y) = \dfrac{2xy\left(\cancel{1} - \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{\cancel{-1}} + o(\|p\|_2^3)\right)}{x^2+y^2} = -xy\dfrac{(x^2+y^2)}{\cancel{x^2+y^2}} + \underbrace{2xy\dfrac{o(\|p\|^2)}{\|p\|^2}}_{o(\|p\|^2)}$ $\to 0$.

$p = (x,y)$. $= -xy + o(\|p\|^2)$.

On en déduit que f est deux fois différentiable en $(0,0)$ (donc C^1 en $(0,0)$).

et $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

On en déduit aussi (de la formule de Taylor) :

$$f(x,y) = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{\nabla f(0,0)}_{=(0,0)}\cdot(x,y) + \frac{1}{2}(x,y)\cdot H(f)(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + o(\|p\|^2)$$

d'où. $$x^2\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)}_{=0} + 2xy\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)}_{=-1} + y^2\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)}_{=0} = -2xy.$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}.$$

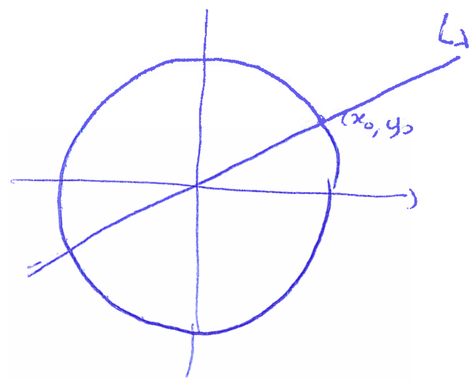
Étudions maintenant f au voisinage de $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 = 1\}$

$p_0 = (x_0,y_0) \in C$.

Supposons $x_0 y_0 \neq 0$, et considérons $f|_{L_\lambda}$ où $L_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda x\}$, $\lambda = \frac{y_0}{x_0}$ $(\lambda \neq 0)$.

$$\underbrace{f(x,\lambda x)}_{= g_\lambda(x)} = \frac{2x^2\lambda\left(\sqrt{|1-x^2-\lambda^2x^2|} - 1\right)}{x^2(1+\lambda^2)}$$

$$= \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\left(\overbrace{\sqrt{|1-(1+\lambda^2)x^2|} - 1}^{h_\lambda(x)}\right).$$



On veut montrer que g_λ n'est pas dérivable

en $\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} = x_0$ en effet, si $x > x_0$, on a $h_\lambda(x) = \sqrt{(1+\lambda^2)x^2 - 1} - 1$

↗

Car $x_0 > 0$

$x_0 < 0$ est analogue

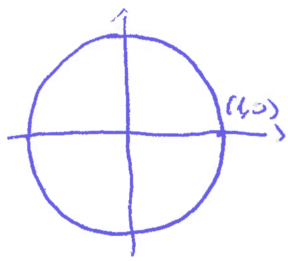
$h_\lambda(x_0) = -1$, $\displaystyle\lim_{x\to x_0^+} \frac{\sqrt{(1+\lambda^2)x^2 - 1}\ \cancel{-1}\ \cancel{+1}}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0^+} \frac{\sqrt{1+\lambda^2}\cdot\sqrt{x^2-x_0^2}}{x-x_0} =$

$$= \lim_{x\to x_0^+} \frac{\sqrt{1+\lambda^2}\cdot\sqrt{x+x_0}}{\underbrace{\sqrt{x-x_0}}_{\to 0^+}} = +\infty .$$

Donc h_λ n'est pas dérivable en x_0, g_λ non plus, et la dérivée vectorielle de f en (x_0,y_0) selon la direction radiale $((x_0,y_0))$ n'existe pas. Donc f n'est pas différentiable en (x_0,y_0) pour $x_0y_0 \neq 0$.

Il nous reste à étudier la différentiabilité en $(x_0,y_0) \in C$ avec $x_0y_0 = 0$. Comme f est symétrique par rapport à l'échange de x et y, et impaire par rapport à x (ou y), il suffit considérer le point $(x_0,y_0) = (1,0)$.

$f(x,0) \equiv 0$. Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0$.



$$f(1,y) = \frac{2y(\sqrt{y^2}-1)}{1+y^2} = \frac{2y(|y|-1)}{1+y^2} \underset{y\to 0}{=} -2y + o(y).$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -2$. Donc le gradient de f en $(1,0)$ est $\nabla f(1,0) = (0,-2)$.

Pour montrer que f est différentiable en $(1,0)$, il faut montrer :

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \left| \frac{\dfrac{2xy\left(\sqrt{|x^2+y^2-1|}-1\right)}{x^2+y^2} - 0 - (-2)\cdot y}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \right| \overset{?}{=} 0$$

$$= \lim_{\substack{(t,y)\to(0,0)\\ (1+t=x)}} \left| \frac{2(1+t)y\left(\sqrt{|2t+t^2+x^2|}-1\right) + 2y(1+2t+t^2+x^2)}{(1+2t+t^2+x^2)\left(\sqrt{t^2+y^2}\right)} \right| =$$

$$= \lim_{(t,y)\to(0,0)} \left| \frac{\cancel{-2y} - 2ty + 2y\overset{\nearrow 1}{(1+t)}\sqrt{|2t+t^2+y^2|} \cancel{+2y} + 2ty(2t+t^2+y^2)}{((1+t)^2+y^2)\sqrt{t^2+y^2}} \right| \to 0$$

or. $((1+t)^2+y^2) \to 1$, Donc c'est équivalent montrer :

$$0 \overset{?}{=} \lim_{(t,y)\to(0,0)} \left| \frac{-2ty + 2y\overbrace{\sqrt{|2t+t^2+y^2|}}^{o(1)} + 2y\overbrace{(2t+t^2+y^2)}^{o(1)}}{\sqrt{t^2+y^2}} \right|$$

$$\leq \lim_{(t,y)\to(0,0)} \underbrace{\left| \frac{2y}{\sqrt{t^2+y^2}} \right|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{o(1)}_{\to 0} = 0.$$

Donc f est différentiable en $(1,0)$ (et $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$).

Pour résumer : · f est C^0.

· f est différentiable en $\mathbb{R}^2 \setminus C \cup \{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$.

· f est de classe C^1 (C^∞) en $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

b) Étudions d'abord les extrema locaux en $\mathbb{R}^2 \setminus C$ (où f est différentiable)

On a vu que $(0,0)$ est un point critique, $\nabla f(0,0) = (0,0)$, $H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de $H(f)(0,0)$ ont signe opposé donc $(0,0)$ est un point de selle (pas un extremum).

On calcule le gradient ∇f dans la boule unité. Où $f(x,y) = \dfrac{2xy(\sqrt{1-x^2-y^2}-1)}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\left[(x^2+y^2)\left(2y(\sqrt{1-x^2-y^2}-1) + 2xy \cdot \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right) - 4x^2y\left(\sqrt{1-x^2-y^2}-1\right)\right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y,x). \quad \text{(par symétrie)}.$$

On pourrait résoudre le système $\nabla f(x,y) = (0,0)$, et montrer que le seul point critique pour f en $\mathbb{R}^2 \setminus C$ est le point $(0,0)$.

~~ou plutôt différemment.~~

On simplifiant : $\nabla f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2-y^2)}\,(x^2+y^2)^2} \cdot \begin{pmatrix} 2y\left[(x^2+y^2)(x^2+y^2+\sqrt{1-x^2-y^2}) - x^2+y^2\right] \\ 2x\left[(x^2+y^2)(x^2+y^2+\sqrt{1-x^2-y^2}) - y^2+x^2\right] \end{pmatrix}$

pour $x^2+y^2<1$

~~On procède différemment.~~

Si $x=0$, et $y \neq 0$, alors $(|y|<1)$.

$$(\underset{0}{x^2}+y^2)(\underset{0}{x^2}+y^2+\sqrt{1-x^2-y^2}) - x^2+y^2 = 0 \Leftrightarrow \underset{>0}{y^2}(\underset{>0}{y^2+\sqrt{1-y^2}}) + \underset{>0}{y^2} = 0 \text{ jamais, si } y\neq 0.$$

De façon analogue le calcul pour $|y|>1$.

Par symétrie, il n'y a pas de points critiques en $\mathbb{R}^2 \setminus C$ de la forme $(\underset{\neq 0}{x},0)$.

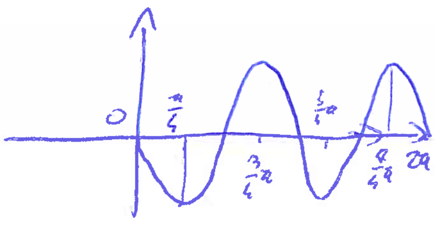
Si $x,y \neq 0$, on obtient le système équivalent $\begin{cases} x^2 = y^2 \\ (\underset{>0}{x^2+y^2})(\underset{>0}{x^2+y^2+\sqrt{1-x^2-y^2}}) = 0. \end{cases}$ $\Rightarrow$ pas de solution

Etudions les extrema en C.

C est paramétré par $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

$$f(\cos t, \sin t) = \frac{2\cos t \sin t\,(\sqrt{|1-1|} - 1)}{1} = -2\cos t \sin t = -\sin 2t.$$

Les extrema locaux de $f|_C$ sont pour



$t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ $k=0,1,2,3$, avec des minimum pour $k=0,2$

maximum pour $k=1,3$.

Les points correspondants sont $\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$ (minima pour $f|_C$)

$\left(\frac{+1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{+1}{\sqrt2}\right)$ (maxima pour $f|_C$).

On étudie $\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$ (par symétrie les autres points sont analogues)

$$f(x,\lambda x) = g_\lambda(x) = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\left(\sqrt{|1-(1+\lambda^2)x^2|}-1\right) \geq -\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$$

où λ est considéré au voisinage de 1, et x au voisinage de $x_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} \sim \frac{1}{\sqrt2}$.

de façon qu'on ait un voisinage de $\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$

Or $-\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}$ admet minimum local en 1, et la valeur est $-\frac{2}{2} = -1$

Donc on a que au voisinage de $\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$, $f(x,y) \geq -1 = f\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$.

Donc $\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$ est un minimum local de f.

De même façon $\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$ est un min local,

et $\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$ sont des maxima locaux pour f.

Remarquons que pour $\lambda=1$, $f(x,x) = g_1(x) = \sqrt{|1-2x^2|}-1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

Donc f n'admet pas de maxima globaux.

Par symétrie $(x \mapsto -x)$, f n'admet pas non plus de minima globaux.